More problems for section 5.2 of *Essentials of Precalculus with Calculus Previews* by Zill and Dewar, 6e.

In the equivalent expressions

$$y = \log_b x \qquad x = b^y$$

b and x must be positive, but y can be any real number. With that in mind,

$$\begin{aligned} b^{\log_b x} &= x \\ \log_b(b^x) &= x \\ \log_b(AB) &= \log_b A + \log_b B \\ \log_b\left(\frac{A}{B}\right) &= \log_b A - \log_b B \\ \log_b(A^t) &= t\log_b A \\ \log_b a &= \frac{\log_c a}{\log_c b} \end{aligned}$$

1. Evaluate each expression. Do not use a calculator.

a. $\log_5 125$ b. $\log_3 \dfrac{1}{27}$ c. $\ln \dfrac{1}{e}$

d. $\log_{10} \sqrt{10}$ e. $\log_{16} 4$ f. $\log_{16} 2$

g. $\log_9 \dfrac{1}{3}$ h. $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$ i. $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

j. $e^{\ln 7}$ k. $e^{-2\ln 5}$ l. $\log_2(\ln e^{2^{10}})$

2. Rewrite entirely in terms of logs of linear functions.

a. $\ln\big((x-1)(x+2)^2\big)$ b. $\log_2(x^2-9)$ c. $\log\sqrt{x^2-5x+6}$

d. $\ln(x^2-3)$ e. $\log\sqrt[3]{(x^2-5x-6)^5}$ f. $\log_3\left(x^2\left(\dfrac{\sqrt[4]{(2-x)}}{(x+3)}\right)^3\right)$

g. $\ln\dfrac{(x-1)^{-1}(3x+1)^2}{(x+1)^{-2}(3x+1)^4}$ h. $\log\dfrac{(x-1)(x+4)}{100}$ i. $\log_\pi \dfrac{x^2+x-2}{2x^2+3x-20}$

j. $\ln(2x^2+5x-12)$ k. $\log(3x^2-18x-48)$ l. $\log\big((x^2-6x+9)^5\big)$

3. Rewrite as a single logarithm.

a. $\ln(x-3) + 4\ln(x+1)$ b. $\log_3(x-1) + \log_3(x+1)$

c. $.5\log(x-4) + .5\log(x+3)$ d. $\ln(2x-1) + \dfrac{1}{3}\ln(3x+4)$

e. $2\log(x-3) - 3\log(4-x)$ f. $-\ln(2x-1) + 2\ln(3x+1) - 3\ln(4x+1)$

g. $3 + \ln(x-1) - 5\ln(x+4)$ h. $\ln x - 2\left(\ln(x+2) - \dfrac{1}{5}\ln(2x-5)\right) + 4\ln(x+4)$

4. Find the inverse function. State the domain and range of the inverse. (Source: Gil Lauzon)

a. $f(x) = e^{x-1}$	b. $g(x) = \ln(x+1)$	c. $h(x) = 3 + e^{x-2}$
d. $\nu(x) = \pi - \ln(x-1)$	e. $\mu(x) = 5^{x+2}$	f. $\xi(x) = \log_5(x+2)$
g. $p(x) = 5 - 3^{2x+1}$	h. $q(x) = 3\ln(1+e^x)$	i. $r(x) = e^{(5-4\ln(x+2))}$

5. Find the domain of the given function.

a. $\ln(2x+5)$	b. $\ln(4-5x)$	c. $\ln(x^2-7x+6)$
d. $\ln(4-3x-x^2)$	e. $\sqrt{3+\ln x}$	f. $\sqrt{4-\ln x}$
g. $\dfrac{1}{2+\ln x}$	h. $\dfrac{2}{4-\ln x}$	i. $\dfrac{-3}{\sqrt{\ln x}}$
j. $\sqrt{3-e^{2x}}$	k. $\sqrt{4+e^{-x}}$	l. $\sqrt{e^x-5}$

Answers

1a. 3 1b. -3 1c. -1 1d. 1/2 1e. 1/2 1f. 1/4 1g. $-1/2$ 1h. 3 1i. -2 1j. 7 1k. 1/25 1l. 10 2a. $\ln(x-1)+2\ln(x+2)$ 2b. $\log_2(x-3)+\log_2(x+3)$ 2c. $.5\log(x-2)+.5\log(x-3)$ 2d. $\ln(x-\sqrt{3})+\ln(x+\sqrt{3})$ 2e. $(5/3)\log(x-6)+(5/3)\log(x+1)$ 2f. $2\log_3 x+.75\log_3(2-x)-3\log_3(x+3)$ 2g. $-\ln(x-1)+2\ln(x+1)-2\ln(3x+1)$ 2h. $-2+\log(x-1)+\log(x+4)$ 2i. $\log_\pi(x-1)+\log_\pi(x+2)-\log_\pi(2x-5)-\log_\pi(x+4)$ 2j. $\ln(2x-3)+\ln(x+4)$ 2k. $\log 3+\log(x+2)+\log(x-8)$ 2l. $10\log(x-3)$ 3a. $\ln((x-3)(x+1)^4)$ 3b. $\log_3(x^2-1)$ 3c. $\log(\sqrt{(x-4)(x+3)})$ 3d. $\ln\Big((2x-1)\sqrt[3]{3x+4}\Big)$ 3e. $\log\left(\frac{(x-3)^2}{(4-x)^3}\right)$ 3f. $\ln\left(\frac{(3x+1)^2}{(2x-1)(4x+1)^3}\right)$ 3g. $\ln\left(\frac{e^3(x-1)}{(x+4)^5}\right)$ 3h. $\ln\left(x(x+4)^4\left(\frac{\sqrt[5]{2x-5}}{x+2}\right)^2\right)$ or $\ln\left(\frac{x(x+4)^4(2x-5)^{2/5}}{(x+2)^2}\right)$ 4a. $f^{-1}(x)=1+\ln x; D=(0,\infty); R=(-\infty,\infty)$ 4b. $g^{-1}(x)=e^x-1; D=(-\infty,\infty); R=(-1,\infty)$ 4c. $h^{-1}(x)=2+\ln(x-3); D=(3,\infty); R=(-\infty,\infty)$ 4d. $\nu^{-1}(x)=1+e^{\pi-x}; D=(-\infty,\infty); R=(1,\infty)$ 4e. $\mu^{-1}(x)=-2+\log_5 x$ (also equals $-2+\ln x/\ln 5$); $D=(0,\infty); R=(-\infty,\infty)$ 4f. $\xi^{-1}(x)=5^x-2; D=(-\infty,\infty); R=(-2,\infty)$ 4g. $p^{-1}(x)=.5\Big(-1+\ln(5-x)/(\ln 3)\Big); D=(-\infty,5); R=(-\infty,\infty)$ 4h. $q^{-1}(x)=\ln(e^{x/3}-1); D=(0,\infty); R=(-\infty,\infty)$ 4i. $r^{-1}(x)=-2+e^{(5-\ln x)/4}; D=(0,\infty); R=(-2,\infty))$ 5a. $(-5/2,\infty)$ 5b. $(-\infty,4/5)$ 5c. $(-\infty,1)\cup(6,\infty)$ 5d. $(-4,1)$ 5e. $[e^{-3},\infty)$ 5f. $(-\infty,e^4]$ 5g. $(0,e^{-2})\cup(e^{-2},\infty)$ 5h. $(0,e^4)\cup(e^4,\infty)$ 5i. $(1,\infty)$ 5j. $(-\infty,\frac{1}{2}\ln 3)$ 5k. $(-\infty,\infty)$ 5l. $(\ln 5,\infty)$